Решения задач VI Интернет-олимпиады для школьников по теории вероятностей и статистике. 2013 год.

Эссе

Большинство участников написали про золотое сечение. Мы приводим лучшее, с нашей точки зрения, эссе, немного сокращенное и подвергнутое незначительной правке. Обидно, что никто из авторов не обратил внимания на важное обстоятельство: в отличие от тестов с отрезками и дверьми, в тесте с блокнотами золотое отношение не было сечением — оно не разбивало на две части никакой отрезок. Ведь восприятие отношения сторон прямоугольника должно значительно отличаться от восприятия разбиения отрезка.

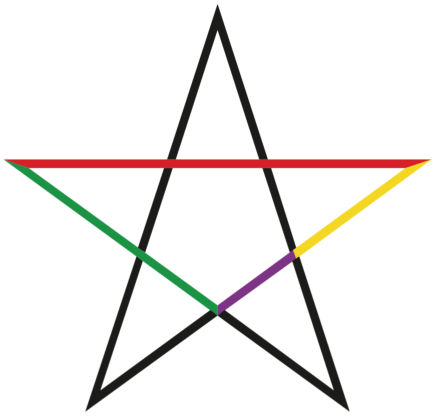
1. Золотое сечение. Число φ (фи) называется «золотым числом» или числом золотого сечения. Золотое сечение разбивает отрезок на две части таким образом, что большая часть относится к меньшей части, как весь отрезок относится к большей части.

Из данного определения следует: $\frac{\varphi}{1}=\frac{(1+\varphi)}{\varphi}$, откуда $\varphi^2-\varphi-1=0$. Решив уравнение, получаем: $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618$.

Последовательность Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

связана с золотым сечением — в ней отношение каждого члена к предыдущему приближается к φ. Золотое сечение легко увидеть в правильной пятиконечной звезде — точка пересечения двух отрезков разбивает каждый из них в золотом отношении.



Считается, что золотое сечение играет важную роль в природе и искусстве. Многие полагают, что древние мастера создавали свои гармоничные произведения, используя число φ и его степени. Например, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют о том, что египетские мастера пользовались золотым сечением. В фасаде древнегреческого храма Парфенона также присутствуют золотые пропорции. Лука Пачоли, современник и друг Леонардо да Винчи, называл это отношение «божественной пропорцией». Сам Леонардо да Винчи нашел в человеческом теле множество отношений φ, φ^2, φ^3 и т.д. Начиная с Леонардо да Винчи, многие художники сознательно использовали пропорции «золотого сечения». Московский архитектор Жолтовский также использовал золотое сечение в своих проектах.

Известно, что Сергей Эйзенштейн искусственно построил фильм «Броненосец Потёмкин» по правилам золотого сечения, разбив ленту на пять частей (в первых трёх действие развивается на корабле, в двух последних — в Одессе), причем граница между третьей и четвертой частью в точке золотого сечения. Утверждается даже, что композиция некоторых произведений А.С.Пушкина и Л.Н.Толстого использует золотые точки.

Термин «золотое сечение» был введён Мартином Омом в 1835 году.

В связи с чудесными свойствами золотого сечения возникло множество утверждений о том, что человеческому глазу золотые пропорции симпатичнее других, что человек подсознательно выбирает среди всех пропорций золотые как наиболее привлекательные и т.п.

Однако есть также основания считать, что значимость золотого сечения в искусстве преувеличена и базируется на ошибках и неподтвержденных мифах. Например, при обсуждении оптимальных соотношений сторон прямоугольников (форма листов бумаги, фотографий, телевизионных экранов) были испытаны разные варианты. Оказалось, что большинство людей считает прямоугольники, у которых длина больше ширины в φ раз «слишком вытянутыми».

Мы предлагаем Вам провести самостоятельное исследование, цель которого — дать аргументы за или против мнения о том, что «золотое сечение — сечение гармонии, приятное глазу». Мы не будем ограничиваться одним экспериментом, а поставим три эксперимента.

1. Выбор формы для блокнота.
2. Разбиение отрезка на две части.
3. Выбор разбиения прямоугольника (дверцы для шкафа).

В первом тесте золотое сечение — отношение двух сторон прямоугольника.

Во втором и третьем тестах золотое сечение используется иначе — как разбиение отрезка или прямоугольника по высоте.

Для проведения исследования Вам потребуется скачать файл тестов, распечатать его, разрезать по пунктирным линиям на карточки и предложить родителям, друзьям и соседям пройти эти тесты. Запомните:

1. Каждый человек (респондент) проходит тест **только один раз**.
2. Каждый человек проходит тест **самостоятельно**, опираясь только на свое мнение.
3. Всего нужно опросить **не менее 30** (а лучше — больше) респондентов.
4. Для каждого **нового респондента придется снова распечатывать** и разрезать тест.

После сбора данных их нужно обработать. Каждый тест обрабатывается своим способом и по каждому тесту делаются свои выводы.

Файл с тестами можно скачать на сайте олимпиады.

Файл с правилами и примерами обработки можно скачать на сайте.

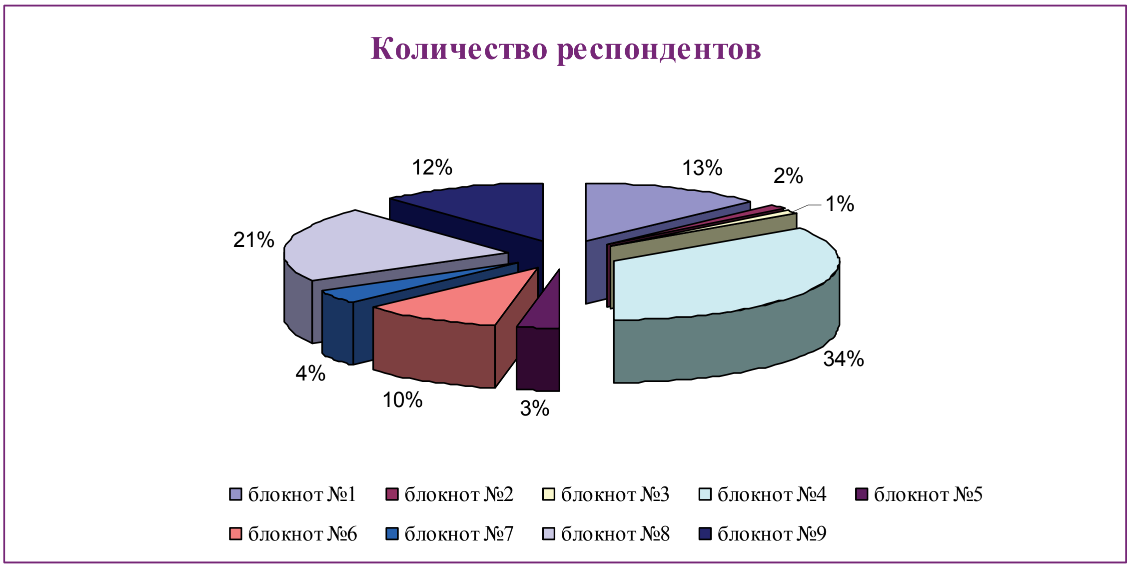
Как и какие выводы можно сделать — пусть Вам подскажут Ваши знания, фантазия и статистическая интуиция.

Эссе одного из участников олимпиады (редактировано)

Трапезникова Алия. 8 класс, г. Казань

В исследовании, считают ли люди «золотое сечение» наиболее гармоничным и приятным для глаза, принимали участие 100 респондентов. Опрос проводился в общеобразовательной школе.

В первом тесте респондентам было предложено выбрать две наиболее удобные для них формы блокнота из 9 предложенных. На диаграмме показано распределение предпочтений.

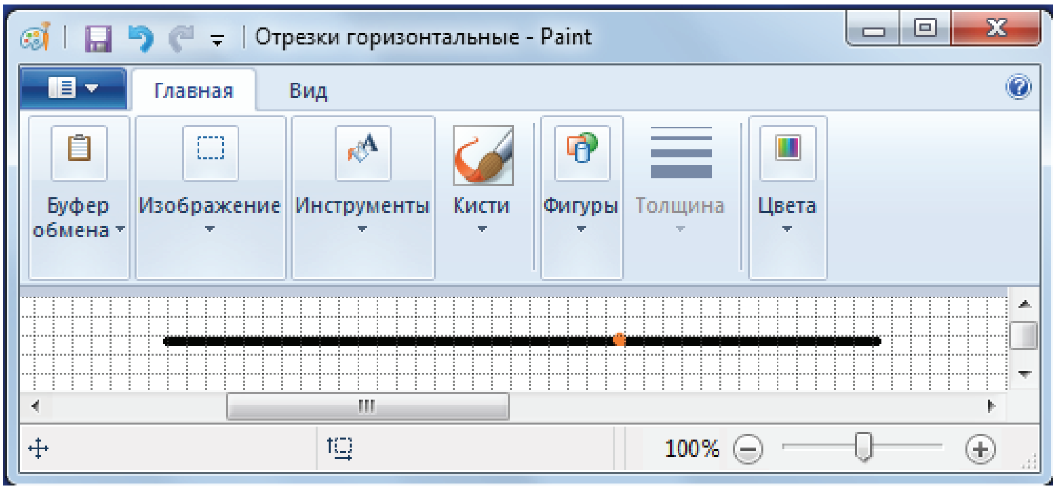


Как показывает диаграмма, самым популярным вариантом оказался вариант 4, сильно уступает ему вариант 8, примерно одинаково популярны варианты 1, 6 и 9, варианты же 2, 3, 5 и 7 оказались непредпочтительны для абсолютного большинства респондентов.

Из всех вариантов наиболее приближенным к $\frac{1}{\varphi}$ отношением длины и ширины блокнота обладают варианты 5 и 6. По результатам опроса вариант 5 оказался не самым популярным (3%), а вариант 6 набрал 10% от общего количества голосов.

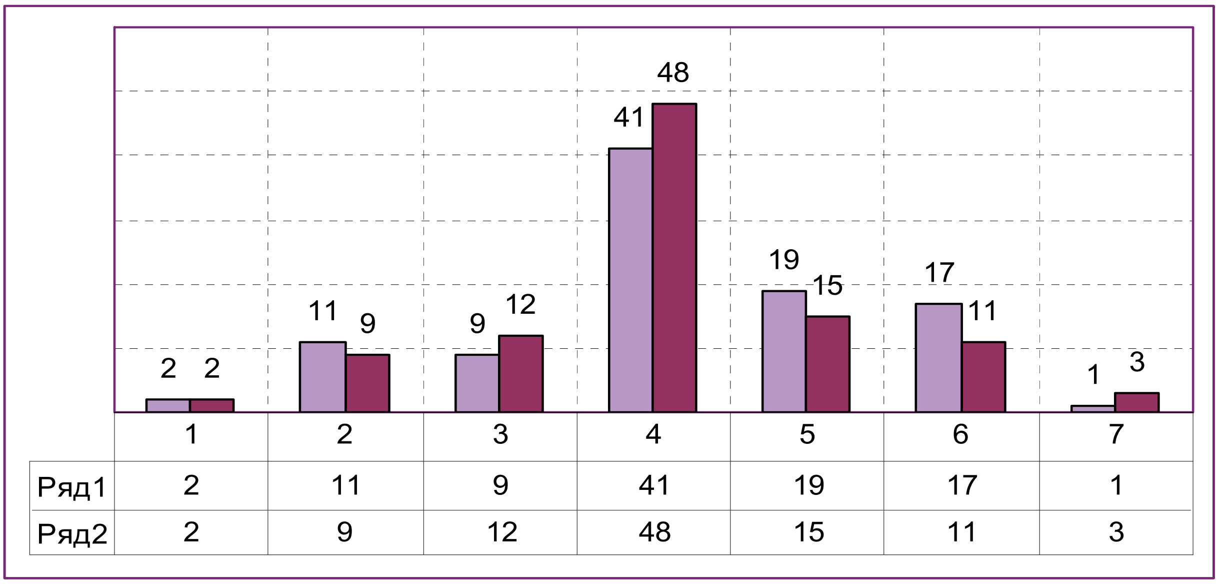
Можно сделать вывод: большинству не нравятся блокноты с «золотым» отношением длины и ширины листа.

Во втором тесте респондентам предлагалось выбрать произвольную точку на двух данных отрезках. Для удобства опроса мы не стали распечатывать тест, а нарисовали в программе Paint нужные отрезки, а опрашиваемые ставили на своём отрезке точку. Чтобы они не видели точки, поставленные предыдущими респондентами, мы сузили окно и подобрали масштаб так, чтобы респондент видел только свой отрезок.



После того, как все точки были отмечены, мы заметили, что приличное количество точек попало в область, близкую к середине отрезка. Для обработки полученных результатов мы разбили каждый отрезок на 7 равных частей и проанализировали, в какую из них попало наибольшее количество точек. Число «7» было выбрано нами неспроста — ведь в таком случае точки, делящие отрезок в отношении, близком к $1:\varphi$ попадают в 3 и 5 области, а точки, делящие отрезок в отношениях, близких к 1:1, попадают в 4 область.

Мы вычислили количество точек, попавших в каждую из частей отрезка, и построили диаграмму.



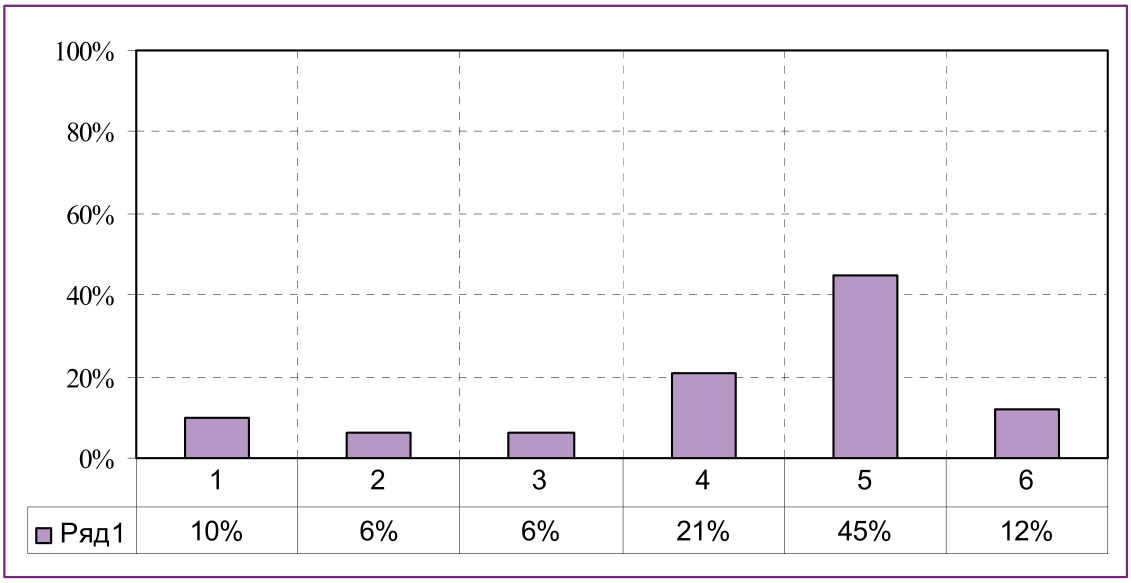
	1	2	3	4	5	6	7
Ряд1	2	11	9	41	19	17	1
Ряд2	2	9	12	48	15	11	3

Видно, что наибольшее количество (41% для первого отрезка, 48% для второго отрезка) точек попало в 4 область, т.е. ближе к середине отрезка. Также видно, что частота точек медленно повышается с приближением к середине. Точек же, близких к значению «золотого сечения», т.е. попавших в области 3 и 5, не так много — 28% для первого отрезка, 27% для второго отрезка, а в области 1 и 7 и того меньше — 3% и 5%.

По результатам второго теста можно сделать такие выводы: большая часть людей выбирает на отрезке точку, которая делит отрезок в отношении не $1:\varphi$ или $\varphi:1$, а примерно пополам.

В последнем, третьем эксперименте респонденты выбирали наиболее привлекательный на их взгляд дизайн декора дверцы шкафа из 6 вариантов.

Результаты опроса:



Из диаграммы видно, что предпочтение отдано 4 и 5 вариантам. При этом отношением длин декоративных панелей, близким к «золотому», обладают именно варианты 4 и 5.

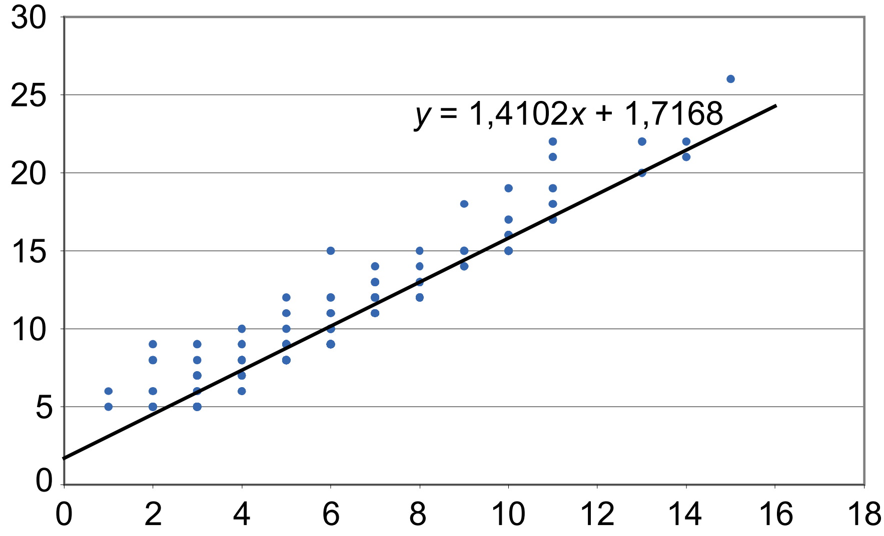
Из результатов этого опыта можно сделать следующий вывод — что наиболее гармоничными люди считают отношения, близкие к «золотому сечению».

Итак, по результатам всех трёх опросов оказалось, что люди считают более красивыми и гармоничными отношения, близкие к «золотому сечению», однако чаще используют в обычной жизни и подсознательно выбирают отношения, далёкие от «золотого» ($1:1$, $3:5$ и т.д.)

2. Скорость ветра. Учитель математики Ноибуро Кавасаки из средней школы при университете Цукубы (Токио) увлекается метеорологической статистикой. Со своими школьниками он проводит обработку данных, пользуясь информацией, полученной из архивов метеорологических сайтов, и пытается делать выводы и даже прогнозы.

Однажды Кавасаки-сенсэй решил посмотреть, наблюдается ли линейная зависимость между средней скоростью ветра и скоростью максимальных порывов ветра в одном и том же месте. Для этого он брал данные различных метеостанций, строил диаграммы рассеивания и прямые, наилучшим образом описывающие эти диаграммы. Для построения прямых г-н Кавасаки использовал метод наименьших квадратов.

На рисунке показана одна из таких диаграмм, построенная по данным за несколько недель из архива погоды г.Понта-Делгада (Португалия).



На оси абсцисс откладывается средняя скорость ветра (м/с) за 10-минутный промежуток времени в конце каждого трехчасового периода, на оси ординат — максимальная скорость порыва ветра (м/с) за этот же промежуток.

Затем г-н Кавасаки построил прямую наименьших квадратов, которая служит осью облака рассеивания. Посмотрев на полученное облако и на уравнение прямой, г-н Кавасаки утверждает, что связь, безусловно, есть, и что максимальная скорость ветра в среднем в 1,41 раза превосходит среднюю скорость ветра.

Нет ли ошибки в рассуждениях г-на Ноибуро Кавасаки? Можете ли Вы предложить свои соображения: как подсчитать, во сколько раз максимальная скорость ветра в среднем превосходит среднюю скорость?

Возможная идея исследования

Анализируя данные и действия господина Ноибуро Кавасаки, можно было обратить внимание на то, что коэффициент прямой наименьших квадратов не является средним отношением скоростей. Отношение это равно отношению ординаты и абсциссы точки на диаграмме. Даже наименьшее из этих отношений существенно больше, чем угловой коэффициент прямой. Здесь мы имеем дело с неверным толкованием описательных параметров.

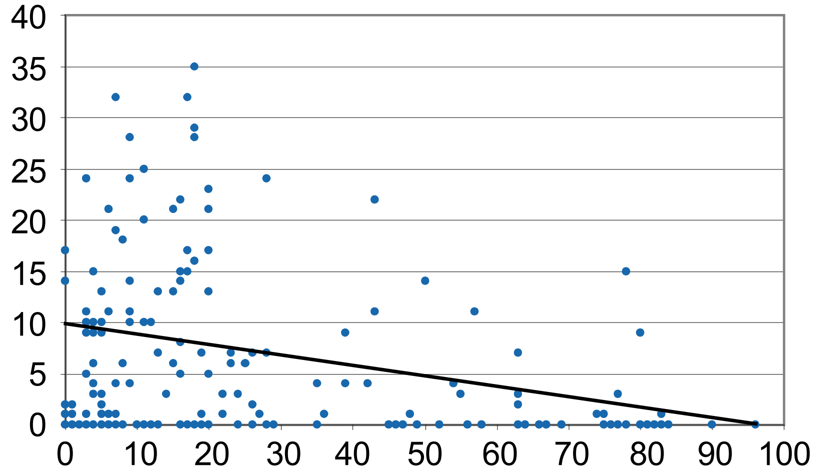
Один из авторов эссе заметил, что количество точек над прямой значительно больше, чем под прямой. Из этого автор сделал вывод, что прямая проведена неверно. Здесь мы должны огорчить автора — дело в том, что число точек над и под прямой оценить по диаграмме нельзя, поскольку случайно совпавшие точки изображаются одной и той же точкой. Прямая проведена верно.

3. Влажность воздуха и снег. Одним февральским утром, отворачивая лицо от колючей метели, господин Ноибуро Кавасаки задался вопросом — а как связаны влажность воздуха и количество снега? Чтобы ответить на вопрос, он зашел на сайт метеостанции префектуры Ниигата и нашел данные о влажности нижних слоев воздуха (ниже 2 000 м) и верхних слоев воздуха (10 000 — 12 000 м) за много дней наблюдений. Кроме того, Кавасаки-сенсэй присовокупил к этим данным информацию о толщине снежного покрова, выпавшего в этот день в месте наблюдения.

Влажность верхних слоев атмосферы (φ_B) и нижних слоев атмосферы (φ_H) измеряется в процентах, а толщина снежного покрова (H) в миллиметрах выпавшего снега.

Вот что получилось, когда г-н Кавасаки составил диаграммы рассеивания.

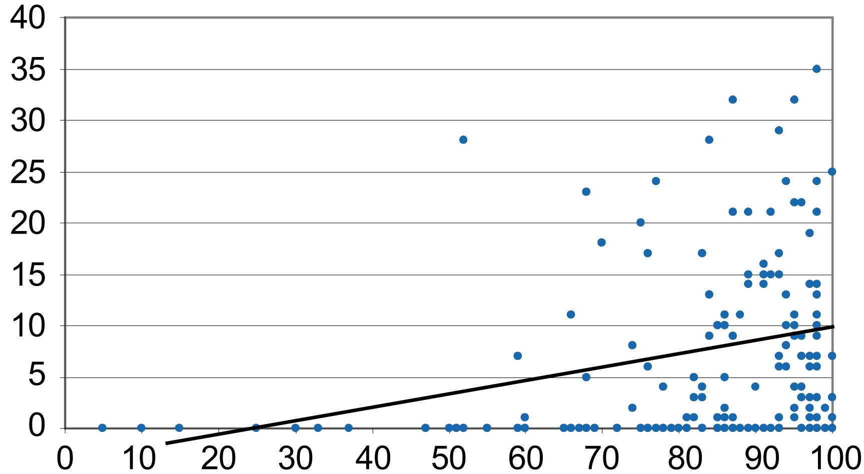
Диаграмма φ_B — H



Кавасаки-сенсэй рассчитал коэффициент линейной корреляции Пирсона. Получилось $r_{\varphi_B, H} = -0{,}24$. После некоторых раздумий г-н Кавасаки написал: «Имеется отрицательная корреляция. Значение коэффициента корреляции приблизительно $-0{,}24$. Абсолютное значение не так велико, я думаю. Однако если верхние слои воздуха сухие, то выпадает много снега».

Затем точно так же, г-н Кавасаки и его ученики построили диаграмму рассеивания для влажности нижних слоев воздуха и количества снега.

Диаграмма φ_H — H



Коэффициент линейной корреляции Пирсона оказался в этом случае равен $r_{\varphi_H, H} = 0{,}28$. Г-н Кавасаки так прокомментировал результат: «Аналогично, здесь имеется слабая положительная корреляция. Значение коэффициента корреляции приблизительно 0,28. Полагаю, и это абсолютное значение не слишком велико. Однако если верхние слои воздуха влажные, то выпадает много снега».

Рассмотрите полученные диаграммы. Попробуйте найти соответствующие данные в архивах сайтов метеонаблюдений (accuweather.com, rp5.ru и т.д.). Постройте свои диаграммы по наблюдениям данных величин. Разберитесь в том, что представляет собой коэффициент корреляции Пирсона и что он показывает. Подумайте, нет ли ошибок в действиях и рассуждениях господина Ноибуро Кавасаки. Напишите в коротком эссе, что Вы думаете по этому поводу. Вдруг у Вас появятся собственные мысли о том, как лучше интерпретировать полученные данные о влажности воздуха и снегообразовании.

Возможная идея исследования

Здесь нужно заметить, что прямая наименьших квадратов, скорее всего, не является подходящим средством изучения данных — форма облака точек наводит на мысль, что линейной зависимости вовсе нет. Коэффициент корреляции Пирсона также служит мерой линейной связи. Если линейной связи нет, то вычисления превращаются в малоосмысленную арифметическую игру. Эта мысль ни в одном из присланных эссе не фигурирует. Поэтому мы не сочли возможным помещать в разборе задач присланные нам тексты.

Другое соображение, связанное с этой ситуацией, присутствует у двух авторов присланных эссе. Соображение такое: даже если связь есть, нельзя утверждать, что она причинно-следственная, то есть, что влажность явно определяет количество снега. Может быть, существует третий параметр, который мы не видим, и который влияет и на то, и на другое? А может быть, таких незамеченных параметров много?

Задачи

4. Министры в Анчурии. В правительстве кабинете министров Анчурии 100 министров. Среди них есть жулики и честные министры. Известно, что из любых десяти министров, по крайней мере, один министр — жулик. Какое наименьшее число министров-жуликов может быть в кабинете?

Решение. Честных министров не больше, чем девять, иначе нашлась бы десятка честных министров, что противоречит условию. Значит, количество министров-жуликов не меньше, чем $100-9=91$.

Ответ: 91.

5. Случайное блуждание точки. Точка выходит из начала координат на прямой и делает a шагов на единицу вправо, b шагов на единицу влево в каком-то порядке, причём $a>b$. Размахом блуждания точки назовём разность между наибольшей и наименьшей координатами точки за всё время блуждания.

а) Найдите наибольший возможный размах блуждания.

б) Найдите наименьший возможный размах.

в) Сколько существует различных последовательностей движения точки, при которых размах блуждания будет наибольшим возможным?

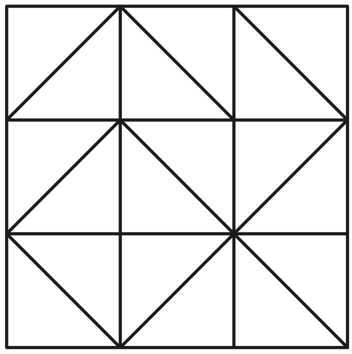
Решение. Решим сразу все три задачи. В конце своего пути точка неизбежно (каков бы ни был порядок шагов вправо и влево) имеет координату $a-b$. Значит, наибольший размах может быть a, а наименьший $a-b$.

Наибольший размах получается, если все шаги вправо точка делает подряд. Первый шаг вправо может быть по счету первым, вторым и так далее до номера $b+1$ (сначала b шагов влево, а затем все шаги вправо). Таким образом, всего $b+1$ способов.

Наименьший размах получается, например, так: точка движется вправо-влево ровно b раз, а затем $a-b$ раз вправо.

Ответ: а) a; **б)** $a-b$; **в)** $b+1$.

6. Закраска квадрата. Квадрат разбит на треугольники (см. рисунок). Сколько существует способов закрасить ровно треть квадрата? Маленькие треугольники нельзя красить частично.



Решение. Закрасить ровно треть квадрата — значит закрасить ровно 6 маленьких треугольников из 18. Это можно сделать $C_{18}^{6}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=18\,564$ способами.

Ответ: 18 564.

7. Мальчик и девочка. Будем считать, что рождение девочки и мальчика равновероятны. Известно, что в некоторой семье двое детей.

а) Какова вероятность того, что из них один мальчик и одна девочка?

б) Дополнительно известно, что один из детей — мальчик. Какова теперь вероятность того, что в семье один мальчик и одна девочка?

в) Дополнительно известно, что мальчик родился в понедельник. Какова теперь вероятность того, что в семье один мальчик и одна девочка?

Решение. а) Дети появляются в некоторой последовательности (ММ, МД, ДМ или ДД). Все последовательности равновозможны, и вероятность каждой $\frac{1}{4}$. Условию «Мальчик и девочка» благоприятствуют два исхода МД и ДМ, значит, вероятность этого равна $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

б) Теперь известно, что один из детей мальчик. Из четырёх последовательностей остаются три равновозможных: ММ, МД и ДМ. Следовательно, теперь вероятность события «Мальчик и девочка» равна $\frac{2}{3}$.

в) Теперь известно, что мальчик родился в понедельник. Введём дополнительно в рассмотрение дни недели: П — понедельник и И — иной день (любой, кроме понедельника). Теперь у нас всего шестнадцать исходов-последовательностей, из которых девять

МИМИ, МИДИ, МИДП, ДИМИ, ДИДИ, ДИДП, ДПМИ, ДПДИ, ДПДП

невозможны, поскольку не содержат фрагмента МП (мальчик, родившийся в понедельник). Зато семь последовательностей, содержащих МП, возможны:

МПМП, МПМИ, МПДП, МПДИ, МИМП, ДПМП и ДИМП.

Учитывая, что вероятность родиться в понедельник равна $\frac{1}{7}$, а в другой день — $\frac{6}{7}$, находим, что суммарная вероятность возможных последовательностей равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{49}+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{49}=\frac{27}{196}.$$

Из этих последовательностей только четыре

МПДП, МПДИ, ДПМП и ДИМП

благоприятствуют событию «мальчик и девочка». Их суммарная вероятность равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{49}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{49}=\frac{14}{196}.$$

Следовательно, условная вероятность события «мальчик и девочка» при условии «есть мальчик, родившийся в понедельник», равна

$$\frac{14}{196}:\frac{27}{196}=\frac{14}{27}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{2}{3}$; **в)** $\frac{14}{27}$.

Комментарий. Задачу можно решить разными способами. Например, можно рассмотреть упрощенное вероятностное пространство, где элементарными исходами служат события вида МПД*, Д*МП, МПМ* и М*МП, где звездочка означает, любой день недели. Событий каждого вида ровно 7, но одно (МПМП) считается дважды. Значит, всего их 27, и все они равновозможны. Из них с девочкой всего 14 событий, откуда и получается результат. Само по себе удивительно, что день недели, в который родился мальчик, изменяет вероятность разнополой пары. Эта мысль несколько неожиданная, согласитесь.

8. Оплата электричества. На рисунке показано платежное поручение на оплату электричества некоторой энергосбытовой компании.

Получатель платежа ОАО XXX

Код РР

Период: Март 2013 г.

Номер лицевого счета XXX

Ф.И.О.: XXX

Адрес: XXX

Код платежа	Тарифная зона	Показания счетчика: Текущее	Показания счетчика: Предыдущее	Расход факт.	Тариф (руб.)	Сумма к оплате (руб.)
13	*пик (Т1)*	1347	1270	77.0	4,03	310,31
2	*ночь (Т2)*	1402	1337	65.0	1,01	65,65
15	*п/пик (Т3)*	1298	1214	84.0	3,39	284,76

Подпись абонента:

Итого к оплате: 660 *р.* 72 *к.*

Каждый месяц клиент передаёт компании показания трёхтарифного счётчика, установленного в квартире. Из показаний за текущий месяц вычитаются соответствующие показания за прошлый месяц, получается фактический расход за месяц по каждой из трёх тарифных зон (пик, ночь, полупик). Затем расход по каждой зоне умножается на цену одного киловатт-часа в этой зоне. Складывая полученные суммы, клиент получает общую сумму оплаты за месяц. В данном примере клиент заплатит 660 р.72 коп.

Компания ведет учёт расхода и оплаты электроэнергии, пользуясь данными, полученными от клиента. Проблема состоит в том, что компания иногда путает полученные шесть чисел, переставляя их произвольном порядке, правда, следит за тем, чтобы текущее показание оставалось больше, чем предыдущее. В результате расчёт компании может оказаться ошибочным. Если компания считает, что клиент должен больше, чем он заплатил, компания требует доплатить разность.

Пользуясь данными изображенной квитанции, найдите:

а) максимально возможную сумму доплаты за март 2013 года, которую компания потребует у клиента;

б) математическое ожидание разности между суммой, которую насчитает компания, и суммой, которую заплатил клиент.

Решение. а) Очевидно (несложно показать), что сумма, которую потребует компания, будет наибольшей, если расход по самому высокому тарифу будет наибольшим возможным, по среднему — наибольшим возможным из оставшихся. Наибольшая возможная сумма при этом 1058 р. 06 коп. Компания потребует доплатить

$$1058 \text{ р. } 6 \text{ коп.} - 660 \text{ р.} 72 \text{ коп.} = 397 \text{ р. } 34 \text{ коп.}$$

б) Решим задачу в общем виде, считая, что клиент передал шесть различных чисел $a<b<c<d<e<f$. Рассмотрим одну из тарифных зон (например, пик, для определенности). Для этой зоны можно выбрать два любых числа из данных шести и поставить их в соответствующем порядке — по возрастанию. Это можно сделать $C_6^2=15$ способами. По условию все способы равновозможны. Поэтому математическое ожидание случайной величины X_1 «Расход по тарифу «Пик» есть среднее арифметическое пятнадцати чисел:

$$\begin{aligned}15\mathrm{E}X_1 = {} & (f-e)+(f-d)+(f-c)+(f-b)+(f-a)+\\ & +(e-d)+(e-c)+(e-b)+(e-a)+\\ & +(d-c)+(d-b)+(d-a)+\\ & +(c-b)+(c-a)+\\ & +(b-a).\end{aligned}$$

Приведём подобные:

$$\mathrm{E}X_1 = \frac{5f+3e+d-c-3b-5a}{15}.$$

Очевидно, такое же ожидание имеют случайные величины X_2 и X_3 «Расход по тарифу «Ночь» и «Расход по тарифу «Полупик». Полная сумма оплаты S, рассчитанная компанией, равна

$$S = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3,$$

где t_1, t_2 и t_3 — цены одного киловатт-часа по соответствующим тарифам. Следовательно,

$$\mathrm{E}S = t_1\cdot\mathrm{E}X_1 + t_2\cdot\mathrm{E}X_2 + t_3\cdot\mathrm{E}X_3 = \frac{5f+3e+d-c-3b-5a}{15}\cdot\left(t_1+t_2+t_3\right),$$

Определим значения переменных в соответствии с данными задачи:

$$f = 1402;\ e = 1347;\ d = 1337;\ c = 1298;\ b = 1270;\ a = 1214;$$
$$t_1 + t_2 + t_3 = 4,03 + 1,01 + 3,39 = 8,43.$$

Получаем:

$$\mathrm{E}\,S = \frac{5\cdot 1402 + 3\cdot 1347 + 1337 - 1298 - 3\cdot 1270 - 5\cdot 1214}{15}\cdot 8,43 =$$
$$= \frac{1210}{15}\cdot 8,43 = 680,02.$$

Математическое ожидание разности между суммой, которую потребует сбытовая компания и суммой, которую заплатит клиент, равно

$$\mathrm{E}\,S - 660,72 = 680,02 - 660,72 = 19,03 \text{ (руб.)}$$

Ответ: а) 397 руб. 34 коп.; **б)** 19руб. 3 коп.

9. Патрик и тапочки. Каждый день пёс Патрик сгрызает одну тапочку из имеющегося дома запаса. Строго с вероятностью 0,5 Патрик хочет сгрызть левую тапочку, и с вероятностью 0,5 — правую. Если желаемой тапочки нет, Патрик расстраивается. Сколько пар одинаковых тапочек нужно купить, чтобы с вероятностью не меньше, чем 0,8 Патрик не расстраивался целую неделю (7 дней)?

Решение. Ясно, что если купить 7 пар, то Патрику наверняка хватит желаемого, даже если он каждый день будет выбирать только левые тапочки. Речь идёт о том, какое наименьшее число тапочек нужно купить, чтобы с вероятностью 0,8 или выше Патрику не пришлось огорчаться. Теория вероятностей часто помогает решить задачу не наверняка, но практически наверняка[1], что в жизни важнее.

Предположим для определенности, что в течение недели Патрик захочет съесть S левых и $7-S$ правых тапочек. Нам нужно найти такое k, что выполняется неравенство

$$\mathrm{P}\left(S \le k \cap 7 - S \le k\right) \ge 0,8.$$

k и будет искомым числом пар. Запишем иначе событие в скобках:

$$\mathrm{P}\left(7 - k \le S \le k\right) \ge 0,8.$$

Вероятность в левой части неравенства равна сумме

$$C_7^{7-k}\frac{1}{2^7} + C_7^{8-k}\frac{1}{2^7} + \ldots + C_7^{k}\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}\cdot\left(C_7^{7-k} + C_7^{8-k} + \ldots + C_7^{k}\right) = \frac{1}{64}\cdot\left(C_7^{4} + C_7^{5} + \ldots + C_7^{k}\right).$$

Тогда

$$C_7^4 + C_7^5 + \ldots + C_7^k \ge 64\cdot 0,8 = 51,2.$$

Учитывая, что в левой части целое число, получаем, что нужно найти наименьшее k, при котором выполняется неравенство

$$C_7^4 + C_7^5 + \ldots + C_7^k \ge 52$$

[1] С высокой вероятностью того, что предложенное решение будет удовлетворительно на практике.

Выпишем 7 строку треугольника Паскаля, начиная с C_7^4:

$$\begin{matrix} C_7^4 & C_7^5 & C_7^6 & C_7^7 \\ 35 & 21 & 7 & 1 \end{matrix}.$$

Сумма $C_7^4 + C_7^5 = 35 + 21 > 52$, значит наименьшее k равно 5.

Ответ: 5.

10. Четное число успехов. Найдите вероятность того, что орёл выпадет чётное число раз, в эксперименте, в котором:

а) симметричную монету бросают n раз;

б) n раз бросают монету, у которой вероятность выпадения орла при одном бросании равна p $(0 < p < 1)$.

Решение. Решим задачу **б)**, попутно получив ответ и на вопрос **а)**. Вероятность того, что орёл выпадет ровно k раз, как известно, равна

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ — вероятность выпадения решки. Поэтому событие «Орёл выпал чётное число раз» имеет вероятность

$$P_2 = C_n^0 p^0 q^n + C_n^2 p^2 q^{n-2} + C_n^4 p^4 q^{n-4} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k},$$

где k — наибольшее чётное число, не превосходящее n, в частности, k может равняться n.

Дополнением к этому событию служит событие «Орёл выпал нечётное число раз». Вероятность этого получается аналогично заменой чётных индексов и степеней нечётными:

$$P_1 = C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^3 p^3 q^{n-3} + C_n^5 p^5 q^{n-5} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m},$$

где m — наибольшее нечётное, не превосходящее n. И, опять же, m может равняться n. Рассмотрим разность этих вероятностей:

$$P_2 - P_1 = C_n^0 p^0 q^n - C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} - C_n^3 p^3 q^{n-3} + \ldots \pm C_n^n p^n q^0.$$

Если n чётно, то перед последним слагаемым стоит плюс, если n нечётно, то минус. В любом случае $P_2 - P_1 = (q-p)^n$. С другой стороны, $P_2 + P_1 = 1$. Из системы полученных уравнений находим:

$$P_2 = \frac{1 + (q-p)^n}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

В частности, для симметричной монеты $p = q = 0{,}5$, поэтому $P_2 = 0{,}5$.

Ответ: а) 0,5; **б)** $\dfrac{1 + (1-2p)^n}{2}$.

11. Избирательные округа. В Анчурии готовятся президентские выборы, в которых хочет победить президент Мирафлорес. Ровно половина многочисленных избирателей поддерживает Мирафлореса, а другая половина — Дика Малони. Мирафлорес тоже является избирателем. По закону он имеет право поделить всех избирателей на два избирательных округа по своему усмотрению. В каждом из округов голосование проводится следующим образом: каждый избиратель отмечает на бюллетене имя своего кандидата; все бюллетени помещаются в урну. Затем из урны достаётся один случайный бюллетень, и тот, чьё имя на нём отмечено, победит в этом округе. Кандидат побеждает на выборах, только если победит в обоих округах. Если победитель не выявился, назначается следующий тур голосования по тем же правилам. Как Мирафлорес должен поделить избирателей, чтобы максимизировать вероятность своей победы на первом туре?

Решение. Предположим, что всего в Анчурии $2n$ избирателей. Может случиться так, что в каждом округе ровно половина избирателей — приверженцы Мирафлореса. Вероятность этого p зависит от способа деления на округа, придуманного Мирафлоресом, но, во всяком случае, $p<1$. При этом условии вероятность, что Мирафлорес победит в обоих округах, равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Теперь предположим, что в одном из округов меньше половины избирателей голосует за Мирафлореса. Такой округ назовем оппозиционным. Тогда в другом округе больше половины избирателей — за Мирафлореса. Вероятность такой ситуации равна $1-p$.

Мирафлорес побеждает с наибольшей вероятностью, если в обоих округах доля приверженцев Мирафлореса максимально возможная.

Найдем максимальную вероятность победы Мирафлореса в оппозиционном округе. Если в нем m избирателей ($m<2n$), то число избирателей, голосующих за Мирафлореса в этом округе, не превосходит $\frac{m}{2}-0,5$. Поэтому вероятность победы Мирафлореса в оппозиционном округе не больше, чем

$$\left(\frac{m}{2}-0,5\right):m=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}=\frac{n-1}{2n-1}.$$

Неравенство обращается в равенство, если $m=2n-1$. Обозначим q вероятность победы Мирафлореса в неоппозиционном округе. Тогда полная вероятность победы Мирафлореса не больше, чем

$$\frac{1}{4}p+q\cdot\frac{n-1}{2n-1}\cdot(1-p)\le\frac{1}{4}p+\frac{n-1}{2n-1}\cdot(1-p)\le\frac{n-1}{2n-1}.$$

Неравенства обращаются в равенство при $n>1$, $q=1$ и $p=0$.

Если Мирафлорес отнесет к первому округу одного только себя, то он победит в этом округе с максимально возможной вероятностью $q=1$. Тогда в оппозиционном округе окажется $2n-1$ избирателей, из которых $n-1$ избиратель голосует за Мирафлореса. Таким образом, вероятность того, что Мирафлорес победит в оппозиционном округе, равна $\frac{n-1}{2n-1}$. Значит, при таком делении на округа вероятность победы Мирафлореса равна

$$1\cdot\frac{n-1}{2n-1}=\frac{n-1}{2n-1},$$

то есть максимально возможная.

Ответ: один округ должен состоять из одного Мирафлореса, а второй — из всех остальных избирателей.

Комментарий: заметим, что при таких правилах победа Мирафлореса — лишь дело времени. Проиграть он не может, поскольку каждый раз округ, состоящий из одного Мирафлореса, голосует против Дика Малони. Таким образом, Малони ни на каком туре не сможет победить. Значит, в конце концов победит Мирафлорес. Решение задачи можно незначительно упростить, приняв сразу некоторые обстоятельства, как очевидные.

12. Гномики и гроза. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p $(0<p<1)$. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите:

а) Вероятность того, что упадёт ровно k гномиков.

б) Математическое ожидание числа упавших гномиков.

Решение. Пусть $q=1-p$ — вероятность того, что гномик не упадёт от испуга (хотя, может быть, перепугается и даже, может быть, упадёт, но не от испуга, а от того, что на него кто-то свалился сверху).

а) Ровно k гномиков упадёт, только если упадёт от испуга k-ый гномик, считая снизу, и не упадёт ни один из $n-k$ гномиков, находящихся выше. Получается, что искомая вероятность равна $q^{n-k}\cdot p=p\cdot(1-p)^{n-k}$.

б) Используем индикаторы[2]. Пусть случайная величина I_j равна 1, если j-ый гномик падает и 0, если он не падает. Вероятность того, что j-ый гномик не упадёт, равна вероятности того, не упадёт он сам и не упадёт никто из $j-1$ гномиков, расположенных выше:

$$\mathrm{P}\left(I_j=0\right)=q^j.\ \text{Тогда}\ \mathrm{E}I_j=\mathrm{P}\left(I_j=1\right)=1-q^j.$$

Общее числа упавших гномиков равно сумме всех индикаторов, значит ожидание этой величины равно

$$\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\ldots+\mathrm{E}I_n=n-q-q^2-q^3-\ldots-q^n=$$
$$=n-q\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=n-\frac{q}{p}+\frac{q^{n+1}}{p}=n+1-\frac{1}{p}+\frac{(1-p)^{n+1}}{p}.$$

Ответ: а) $p(1-p)^{n-k}$; **б)** $n+1-\frac{1}{p}+\frac{(1-p)^{n+1}}{p}$.

[2] *Индикатором* события называется случайная величина, которая равна единице, если событие произошло или нулю, если событие не произошло. Интересное свойство индикатора — его математическое ожидание равно вероятности этого события.

13. Где больше отклонение? Бросим симметричную монету n раз. Предположим, что орёл выпал m раз. Число m/n называется *частотой* выпадения орла. Число $\frac{m}{n}-0,5$ называется *отклонением* частоты от вероятности, а число $\left|\frac{m}{n}-0,5\right|$ называется *абсолютным отклонением*. Заметим, что отклонение и абсолютное отклонение являются случайными величинами. Например, если монету бросили 5 раз, и два раза выпал орёл, то отклонение равно $\frac{2}{5}-0,5=-0,1$, а абсолютное отклонение равно $|-0,1|=0,1$.

Эксперимент состоит из двух частей: сначала монету бросают 10 раз, а потом — 100 раз. В каком из этих случаев больше математическое ожидание абсолютного отклонения частоты выпадения орла от вероятности?

Решение. Пусть в серии из 10 бросаний орёл выпал m_{10} раз. Тогда отклонение частоты от вероятности равно $|\alpha|$, где $\alpha=\frac{m_{10}}{10}-0,5$. Пусть $\mathrm{E}|\alpha|=a$.

Вторую последовательность, состоящую из 100 бросаний, разобьем на 10 серий по десять бросков. В каждой из этих 10 малых серий имеется своё отклонение (неабсолютное) α_i (i — номер серии), причем $\mathrm{E}|\alpha_i|=\mathrm{E}|\alpha|=a$.

Тогда отклонение в последовательности 100 бросаний равно

$$\beta=\frac{m_{100}}{100}-0,5=\frac{10\alpha_1+10\alpha_2+10\alpha_3+\ldots+10\alpha_{10}}{100}.$$

Следовательно,

$$|\beta|=\frac{1}{10}|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{10}|\le\frac{1}{10}\left(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_{10}|\right).$$

Рассмотрим случайную величину $X=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_{10}|-10|\beta|$, которая неотрицательна и равна нулю только, если все отклонения α_i имеют один и тот же знак. Вероятность этого очень мала (во всяком случае, меньше единицы), следовательно, $\mathrm{E}X>0$. Тогда

$$0<\mathrm{E}X=\mathrm{E}|\alpha_1|+\mathrm{E}|\alpha_2|+\ldots+\mathrm{E}|\alpha_{10}|-10\mathrm{E}|\beta|=10a-10\mathrm{E}|\beta|=10\cdot\left(\mathrm{E}|\alpha|-\mathrm{E}|\beta|\right),$$

откуда $\mathrm{E}|\alpha|>\mathrm{E}|\beta|$.

Ответ: математическое ожидание абсолютного отклонения в серии из 10 бросков больше, чем в серии из 100 бросков.

14. Концепция. В Анчурии всего K законов и N министров. Вероятность того, что случайно взятый министр знает случайно выбранный закон, равна p. Однажды министры собрались на совет, чтобы написать Концепцию. Если хотя бы один министр знает закон, то этот закон будет учтён в Концепции, в противном случае этот закон в Концепции учтён не будет. Найдите:

а) Вероятность того, что ровно M законов будут учтены в Концепции.

б) Математическое ожидание числа учтённых законов.

Решение. а) Найдем вероятность того, что ни один министр не знает первого закона: $(1-p)^N$. Значит, вероятность того, что первый закон будет учтён, равна $q=1-(1-p)^N$.

Вероятность того, что ровно M каких-то законов из K имеющихся, будут учтены в Концепции легко найти по формуле биномиальной вероятности:

$$\mathrm{P}_M = C_K^M q^M (1-q)^{K-M} = C_K^M \left(1-(1-p)^N\right)^M (1-p)^{N\cdot(K-M)}.$$

б) Введем индикатор — случайную величину I_k, которая равна 1, если закон с номером k учтён и 0 в противном случае. Такая величина называется индикатором. Математическое ожидание равно

$$\mathrm{E}I_k = 1\cdot\left(1-(1-p)^N\right)+0\cdot(1-p)^N = 1-(1-p)^N.$$

Количество учтённых законов X равно сумме этих величин: $X=I_1+I_2+\ldots+I_K$.

Поэтому $\mathrm{E}X=\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\ldots+\mathrm{E}I_K = K\cdot\left(1-(1-p)^N\right)$.

Ответ: а) $C_K^M\left(1-(1-p)^N\right)^M(1-p)^{N\cdot(K-M)}$; **б)** $K\left(1-(1-p)^N\right)$.

15. Двойняшки. Вероятность рождения двойняшек в Швамбрании равна p, тройняшки в Швамбрании не рождаются.

а) Оцените вероятность того, что встреченный на улице швамбранец — один из пары двойняшек?

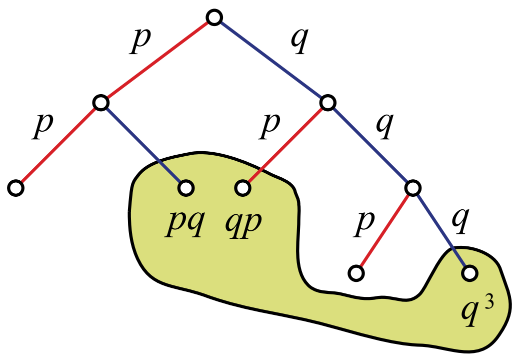
б) В некоторой швамбранской семье трое детей. Какова вероятность того, что среди них есть пара двойняшек?

в) В школах швамбранских двойняшек обязательно зачисляют в один класс. Всего в Швамбрании N первоклассников. Каково матожидание числа пар двойняшек среди них?

Решение. а) Пусть по улицам Швамбранских городов и сёл ходят M пар двойняшек и N «одиночек». Тогда $\frac{M}{M+N}\approx p$, откуда $\frac{M}{N}\approx\frac{p}{1-p}$. Встретим случайного швамбранца. Он является одним из двойняшек с вероятностью

$$\frac{2M}{2M+N}=\frac{2\frac{M}{N}}{2\frac{M}{N}+1}\approx\frac{2\frac{p}{1-p}}{2\frac{p}{1-p}+1}=\frac{2p}{p+1}.$$

б) Искомая вероятность условная. Чтобы разобраться, нарисуем граф. Красные ребра означают рождение двойняшек. Синие — одиночек. Граф можно сколь угодно долго продолжать вниз, мы нарисуем только тот фрагмент графа, который учитывает все возможные способы появления на свет трех детей. Возле каждого ребра подпишем вероятность. Изобразим криволинейной областью событие $A=\{\text{Трое детей}\}$. В это



событие попадает три вершины, то есть три элементарных события с суммарной вероятностью $2pq+q^3$.

Из них событию $B=\{\text{Есть двойняшки}\}$ благоприятствуют два элементарных события (цепочки, содержащие красные ребра) с суммарной вероятностью $2pq$. Тогда условная вероятность

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2pq}{2pq+q^3}=\frac{2p}{2p+q^2}.$$

в) Как мы знаем, вероятность того, что случайно взятый первоклассник является одним из пары двойняшек, равна $\frac{2p}{p+1}$. Введем случайную величину I_k — индикатор двойняшки. $I_k=1$, если k-ый первоклассник – один из пары двойняшек и $I_k=0$, если k-ый первоклассник — одиночка.

$$\mathrm{E}I_k=1\cdot\frac{2p}{p+1}+0\cdot\frac{1-p}{p+1}=\frac{2p}{p+1}.$$

Тогда общее число пар первоклассников-двойняшек равно

$$S=\frac{1}{2}\left(I_1+I_2+\ldots+I_N\right).$$

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{E}S=\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\ldots+\mathrm{E}I_N\right)=\frac{1}{2}\cdot N\cdot\frac{2p}{p+1}=\frac{Np}{p+1}.$$

Ответ: а) $\frac{2p}{1+p}$; **б)** $\frac{2p}{2p+q^2}$; **в)** $\frac{Np}{p+1}$.

16. Дисперсия числа совпадений. На столе разложена колода игральных карт (например, в ряд). Поверх каждой карты положили карту другой колоды. Некоторые карты, возможно, совпали. Найдите:

а) математическое ожидание числа совпадений;

б) дисперсию числа совпадений.

Решение. Здесь используется фабула хорошо известной задачи о совпадениях, но вопрос стоит не о вероятности, а об ожидании и дисперсии числа совпадений. Как ни странно, решить эту задачу легче, чем найти вероятность. Снова воспользуемся индикаторами.

а) Пронумеруем пары от 1 до N (мы не знаем, сколько их) в том порядке, в каком они лежат на столе. Пусть индикатор I_k равен 1, если в k-й паре оказались две одинаковые карты, и 0, если в k-й паре карты не одинаковы. Очевидно, $\mathrm{P}(I_k=1)=\frac{1}{N}$. Значит, I_k имеет распределение Бернулли

$$I_k\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{N-1}{N} & \frac{1}{N}\end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание: $\mathrm{E} I_k = \dfrac{1}{N}$. Ожидание не зависит от k.

Пусть S — число пар с совпадением. Оно равно сумме индикаторов:

$$S = I_1 + I_2 + \ldots + I_N.$$

Перейдем к ожиданиям: $\mathrm{E} S = \mathrm{E} I_1 + \mathrm{E} I_2 + \ldots + \mathrm{E} I_N = N \cdot \dfrac{1}{N} = 1$.

б) Найдем дисперсию: $\mathrm{D} S = \mathrm{E} S^2 - \left(\mathrm{E} S\right)^2 = \mathrm{E} S^2 - 1$.

Трудность представляет ожидание S^2. Чуть модифицируем тот же способ, что мы уже использовали:

$$S^2 = \left(I_1 + I_2 + \ldots + I_N\right)^2 = I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_N^2 + 2\left(I_1 I_2 + I_1 I_3 + \ldots + I_j I_k + \ldots + I_{N-1} I_N\right),$$

где в скобках стоит сумма попарных произведений всевозможных различных индикаторов. Чтобы перейти к математическому ожиданию, нужно найти распределение и ожидание случайных величин I_k^2 и $I_j I_k$ при $k \ne j$.

Распределение I_k^2, очевидно, совпадает с распределением I_k: $I_k^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{N-1}{N} & \dfrac{1}{N} \end{pmatrix}$.

Значит, $\mathrm{E} I_k^2 = \dfrac{1}{N}$.

Теперь рассмотрим величину $I_j I_k$. Она равна 1, если карты совпали и в j-й паре, и в k-й паре. В j-й паре карты совпадают с вероятностью $\dfrac{1}{N}$. Если это произошло, то вероятность совпадения карт в k-й паре равна $\dfrac{1}{N-1}$. Поэтому

$$\mathrm{P}\left(I_j I_k = 1\right) = \mathrm{P}\left(I_j = 1 \cap I_k = 1\right) = \mathrm{P}\left(I_k = 1 \middle| I_j = 1\right) \cdot \mathrm{P}\left(I_j = 1\right) = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N(N-1)}.$$

Во всех остальных случаях $I_j I_k = 0$. Получаем распределение

$$I_j I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \dfrac{1}{N(N-1)} & \dfrac{1}{N(N-1)} \end{pmatrix},$$

из которого: $\mathrm{E}\left(I_j I_k\right) = \dfrac{1}{N(N-1)}$.

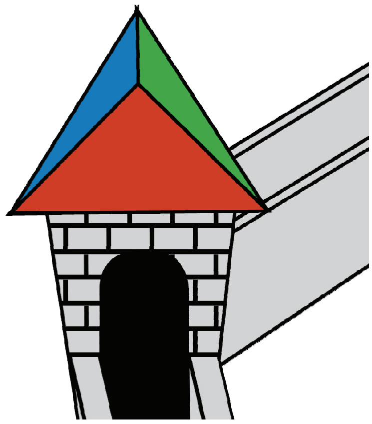
Тогда $$\mathrm{E} S^2 = N \cdot \mathrm{E} I_k^2 + 2C_N^2 \cdot \mathrm{E}\left(I_j I_k\right) = N \cdot \frac{1}{N} + 2C_N^2 \cdot \frac{1}{N(N-1)} = 1 + 1 = 2,$$

и, следовательно, $\mathrm{D} S = 2 - 1 = 1$.

Ответ: а) 1; **б)** 1.

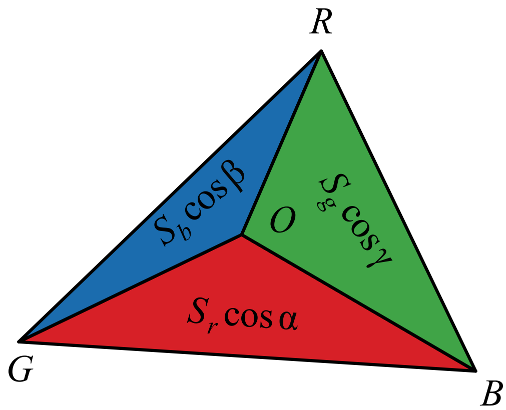
Комментарий. Удивительно, но ни ожидание, ни дисперсия числа совпадений не зависят от количества карт в колоде.

17. Трехскатная крыша. Башня в замке короля Артура увенчана крышей, которая представляет собой треугольную пирамиду, у которой все плоские углы при вершине — прямые. Три ската крыши покрашены в разные цвета. Красный скат крыши наклонен к горизонтали под углом α, а синий — под углом β. Найдите вероятность того, что дождевая капля, вертикально упавшая на крышу в случайном месте, упала на зеленый скат.



Решение. Будем считать, что капля падает на крышу случайно в том смысле, что вероятность попадания её в какую-то область крыши пропорциональна площади проекции этой области на горизонтальную поверхность. Тогда нас должны интересовать площади проекций скатов на треугольное основание крыши.

Обозначим площадь зеленого ската S_g. Тогда площадь проекции этого ската на плоскость треугольника RBG, лежащего в основании крыши, равна $S_{ORB} = S_g \cos\gamma$, где γ — неизвестный нам угол наклона синего ската.



Обозначим S площадь треугольника RGB: $S_g = S\cos\gamma$. Следовательно,

$$S_{ORB} = S\cos^2\gamma.$$

Искомая вероятность равна

$$\frac{S_{ORB}}{S} = \frac{S\cos^2\gamma}{S} = \cos^2\gamma.$$

Осталось найти $\cos^2\gamma$. Введём обозначения S_r и S_b для площадей красного и синего скатов и проведя аналогичные выкладки, найдем:

$$S_{OBG} = S\cos^2\alpha;\ S_{ORG} = S\cos^2\beta.$$

Тогда

$$S = S_{OBG} + S_{ORG} + S_{ORB} = S\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right),$$

откуда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Значит[3], $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

Ответ: $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

[3] Полученное тождество является одной из разновидностей основного тригонометрического тождества в трехмерном пространстве. Его можно было здесь не доказывать, а взять целиком из школьного учебника геометрии 10 класса.

18. Очередь в банке. Если один человек тратит в очереди одну минуту на ожидание, будем говорить, что бесцельно затрачена одна человеко-минута. В очереди в банке стоит восемь человек, из них пятеро планируют простые операции, занимающие 1 минуту, а остальные планируют длительные операции, занимающие 5 минут. Найдите:

а) наименьшее и наибольшее возможное суммарное количество бесцельно затраченных человеко-минут;

б) математическое ожидание количества бесцельно затраченных человеко-минут, при условии, что клиенты встают в очередь в случайном порядке.

Решение. Опять будем решать задачу в общем случае. Пусть короткая операция занимает a минут, а длинная — b минут, при этом $a<b$. Клиента, планирующего простую операцию, для краткости будем называть «торопыгой», а того, кто собирается возиться долго — назовём «копуша». Предположим, что торопыг всего n, а копуш всего m.

Очевидно, число бесцельно потраченных человеко-минут зависит от порядка, в котором чередуются торопыги и копуши.

а) Пусть где-то в очереди торопыга стоит сразу за копушей. Поменяем их местами.

1. Те, кто стоит перед ними ничего не выигрывают и не проигрывают.
2. Для тех, кто за ними, время ожидания также не меняется.
3. Для торопыги время ожидания уменьшается на b минут.
4. Для копуши время ожидания увеличится на a минут.

Следовательно, суммарное бесцельно потраченное время всех стоящих в очереди, уменьшится $b-a$ минут. Будем таким образом переставлять местами людей в парах «Копуша-Торопыга» до тех пор, пока не получится очередь, в которой все торопыги стоят прежде всех копуш. В этой очереди бесцельно потраченное время будет минимальным.

Найдем суммарное бесцельно потраченное время. Второй человек ждет первого, третий ждет предыдущих двух и так далее.

Суммарное время, которое тратят ждущие, пока все впереди стоящие торопыги не закончат свои операции, равно

$$\left(a+2a+\ldots+(n-1)a\right)+m\cdot na=a\cdot\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)+mna=aC_n^2+mna.$$

Здесь слагаемое mna — это суммарное время, потраченное всеми копушами на ожидание всех торопыг.

Суммарное время, которое тратят ждущие, пока свои операции проводят впереди стоящие копуши, равно $b+2b+\ldots+(m-1)b=bC_m^2$.

Общее минимальное время ожидания всеми клиентами равно[4]

$$T_{\min}=aC_n^2+amn+bC_m^2.$$

В нашем конкретном случае получаем:

$$1\cdot C_5^2+1\cdot5\cdot3+5\cdot C_3^2=10+15+15=40.$$

[4] Если проведенные выкладки непонятны, изобразите время ожидания каждого клиента графически полоской. Каждая следующая полоска будет длиннее предыдущей. Если ширина полоски 1, а длина равна числу минут ожидания клиента, то общее время ожидания будет равно площади получившейся фигуры.

Аналогично доказывается, что наибольшее бесцельно потраченное время будет, если все копуши стоят прежде всех торопыг. Это время равно

$$T_{\max} = aC_n^2 + bmn + bC_m^2.$$

При числовых данных задачи получается $1 \cdot C_5^2 + 5 \cdot 5 \cdot 3 + 5 \cdot C_3^2 = 10 + 75 + 15 = 100$.

б) Рассмотрим k-го клиента в очереди. Обозначим X_k число копуш, стоящих перед ним. Тогда $X_k = I_1 + I_2 + ... + I_{k-1}$, где индикатор I_j принимает значение 1, если j-й клиент – копуша и 0, если j-ый клиент – торопыга.

j-й клиент может оказаться копушей с вероятностью $\frac{m}{m+n}$ и торопыгой с вероятностью $\frac{n}{m+n}$. Значит, $\mathrm{E}I_j = 0 \cdot \frac{n}{m+n} + 1 \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+n}$.

Следовательно, $\mathrm{E}X_k = \frac{(k-1)m}{m+n}$.

Обозначим T_k время ожидания k-го клиента. Получаем:

$$T_k = X_k b + (k - 1 - X_k)a = (b-a)X_k + a(k-1).$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}T_k = (b-a)\mathrm{E}X_k + a(k-1) = (b-a) \cdot \frac{(k-1)m}{m+n} + a(k-1) = \frac{bm+an}{m+n} \cdot (k-1).$$

Суммируя полученное выражение по всем клиентам от 1 до $m+n$-го, получаем математическое ожидание всего бесцельно затраченного времени:

$$\mathrm{E}T = \mathrm{E}(T_1 + T_2 + ... + T_n) = \frac{bm+an}{m+n} \cdot (0 + 1 + 2 + ... + (m+n-1)) =$$
$$= \frac{(bm+an)(n+m-1)}{2} = C_{n+m}^2 \cdot \frac{bm+an}{m+n}.$$

Подставим известные из условия числа: $C_8^2 \cdot \frac{5 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{8} = \frac{7 \cdot 20}{2} = 70$.

Ответ: а) 40 минут и 100 минут; **б)** 70 минут.

Комментарий. Ожидаемое время оказалось средним арифметическим между наибольшим и наименьшим возможным. Попробуйте самостоятельно доказать факт $\mathrm{E}T = \frac{T_{\min} + T_{\max}}{2}$ в общем виде, то есть доказать комбинаторное тождество

$$C_{n+m}^2 \cdot \frac{bm+an}{m+n} = aC_n^2 + \frac{a+b}{2}mn + bC_m^2.$$

К слову, задачу б) можно было решить почти без выкладок, заметив, что каждой расстановке копуш и торопыг можно поставить в соответствие симметричную равновозможную ей расстановку, причем сумма времени ожидания по обеим расстановкам будет равна $aC_n^2 + \frac{a+b}{2} \cdot mn + bC_m^2$. Для этого удобно воспользоваться графическим методом (см. сноску выше).

19. Замена фонарей. Вдоль дороги стоит 9 фонарей. Если перегорел один из них, а соседние светят, то дорожная служба не беспокоится. Но если перегорают два фонаря подряд, то дорожная служба сразу меняет все перегоревшие фонари. Каждый фонарь перегорает независимо от других.

а) Найдите вероятность того, что при очередной замене придется поменять ровно 4 фонаря.

б) Найдите математическое ожидание числа фонарей, которые придется поменять при очередной замене.

Решение. Решать задачу будем в общем случае. Для простоты будем считать горящий фонарь единицей, а перегоревший — нулём. Тогда сначала мы имеем ряд из n единиц, которые последовательно и в случайном порядке «перегорают», то есть превращаются в нули.

а) После первого превращения два нуля подряд получиться не могут. Найдем вероятность того, что после k превращений ряд НЕ ИМЕЕТ двух нулей подряд. Такой ряд для краткости назовём правильным. Решим вопрос, сколько всего существует правильных рядов длины n с ровно k нулями.

Каждый ряд длины n ставится во взаимно однозначное соответствие ряду длины $n+1$ с последней единицей. Значит, вместо правильных рядов длины n можно пересчитывать правильные ряды длины $n+1$ с тем же числом нулей единицей на конце. Например, правильный ряд 101111010 длины 9 соответствует правильному ряду 1011110101 длины 10. Осталось пересчитать такие «удлинённые» ряды.

Любой правильный ряд k нулями и с единицей в конце можно единственным образом набрать из элементов 1 и 01, как будто сложить из карточек

1	01

Например, ряд 1011110101 складывается так:

1	01	1	1	1	01	01

Для ряда длины $n+1$ потребуется ровно k синих карточек и ровно $n+1-2k$ розовых карточек. Всего нужно $n-k+1$ карточек. Их можно расположить в любом порядке. Следовательно, существует всего C_{n-k+1}^{k} таких рядов, а значит, ровно столько же нужных нам правильных рядов длины n.

Заметим, что в ходе превращений k нулей могут возникнуть в любом порядке, и всего таких порядков $k!$. Значит, всего существует

$$C_{n-k+1}^{k}\cdot k!$$

способов получить из начального ряда единиц какой-нибудь правильный ряд с k нулями. С другой стороны, общее число рядов длины n с k нулями, равно C_n^k и, значит, всего существует $C_n^k k!$ способов получить какой-нибудь ряд с k нулями последовательными превращениями единиц в нули.

Все эти способы равновозможны, поэтому вероятность того, что после k превращений получившийся ряд будет правильным, равна

$$r_k = \frac{C_{n-k+1}^k k!}{C_n^k k!} = \frac{C_{n-k+1}^k}{C_n^k}.$$

Теперь решим вопрос, какова вероятность p_k того, что два нуля подряд появятся РОВНО после k превращений. Для этого нужно вычесть из вероятности получить правильный ряд с $k-1$ нулями вероятность получить правильный ряд с k нулями. Таким образом[5],

$$p_k = r_{k-1} - r_k = \frac{C_{n-k+2}^{k-1}}{C_n^{k-1}} - \frac{C_{n-k+1}^k}{C_n^k}.$$

Для $n=9$, $k=4$ получаем:

$$p_k = \frac{C_7^3}{C_9^3} - \frac{C_6^4}{C_9^4} = \frac{35}{84} - \frac{15}{126} = \frac{25}{84} \approx 0{,}294.$$

б) Найдем математическое ожидание числа фонарей под замену. Ясно, что это математическое ожидание числа превращений единиц в нули, прежде чем образуется два нуля подряд. Обозначим эту случайную величину X.

$$\mathrm{E}\,X = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \ldots$$

Суммирование есть смысл продолжать до $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ (квадратные скобки означают целую часть), но можно продолжить и до бесконечности, учитывая, что при $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$ все вероятности нулевые. Далее:

$$\mathrm{E}\,X = r_0 - r_1 + 2(r_1 - r_2) + 3(r_2 - r_3) + 4(r_3 - r_4) + \ldots =$$
$$= r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_k + \ldots = \frac{C_{n+1}^0}{C_n^0} + \frac{C_n^1}{C_n^1} + \frac{C_{n-1}^2}{C_n^2} + \ldots \frac{C_{n-k+1}^k}{C_n^k} + \ldots$$

Кратко это можно записать с помощью символа суммирования:

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{C_{n-k+1}^k}{C_n^k}.$$

[5] Если в числе C_n^m верхний индекс больше нижнего, то такое число считают равным нулю. Это соглашение позволяет не рассматривать отдельно случаи, когда k настолько велико, что в числе C_{n-k+2}^{k-1} или C_{n-k+1}^k верхний индекс стал больше нижнего.

Полученное выражение любопытным образом интерпретируется с помощью треугольника Паскаля. Числители образует наклонную, а знаменатели — горизонтальную линию (см. рисунок). Поделив числители на соответствующие знаменатели (в том же столбце), сложим полученные частные.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Для $n=9$

$$\mathrm{E}\,X=\frac{1}{1}+\frac{9}{9}+\frac{28}{36}+\frac{35}{84}+\frac{15}{126}+\frac{1}{126}=\frac{837}{252}\approx 3{,}32.$$

Ответ: а) $\frac{25}{84}\approx 0{,}294$; **б)** $\frac{837}{252}\approx 3{,}32$.